

极小化总完工时间的单机连续型批调度问题

赵玉芳^{1,2}, 唐立新¹

(1. 东北大学物流优化与控制研究所, 辽宁沈阳 110004; 2. 沈阳师范大学数学与系统科学学院, 辽宁沈阳 110034)

摘要: 连续型批处理机调度问题是一种新型的批调度问题, 它是从钢铁工业加热炉对管坯的加热过程中提炼出来的. 批的加工时间取决于该批的大小、批中工件的最大加工时间及机器的容量. 本文研究了目标函数是极小化总完工时间问题, 对最优解的性质进行了理论分析, 提出了最优的分批策略及批间序的确定方法, 给出了一个多项式可解的动态规划算法.

关键词: 钢铁; 加热炉调度; 连续批; 动态规划

中图分类号: O223; TP23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2008)02-0367-04

Scheduling a Single Continuous Batch Processing Machine to Minimize Total Completion Time

ZHAO Yur-fang, TANG Li-xin

(1. The Logistics Institute, Northeastern University, Shenyang, Liaoning 110004, China;

2. School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang, Liaoning 110034, China)

Abstract: This paper addresses a problem of continuous batch scheduling arising in the heating process of blooms in steel industry. Each heating furnace is modeled as continuous batch processing machine, which can handle more than one job simultaneously. The processing time of a batch depends on its size, the longest processing time of jobs in the batch and the capacity of the batch processing machine. In this paper we consider the problem for minimizing total completion time. The theoretic analysis of optimal solution properties are given, and the optimal policy of batching and the method of sequencing the batches are provided. A dynamic programming algorithm with a polynomial running time is represented based on the properties of batching and scheduling.

Key words: steel industry; heating furnace scheduling; continuous batch; dynamic programming algorithm

1 引言

连续型批处理机调度问题简称为连续型批调度问题(Continuous batch scheduling problems)^[1]的主要特征为批中工件的进入、加工和离开都按周期连续进行, 批处理机在同一时刻可同时加工多个工件, 其最大数称为批处理机的容量; 同一批工件中每个工件的加工时间均等于该批中工件加工时间的最大者; 批的大小为这批工件的个数, 而批的加工时间取决于批中工件的加工时间、批的大小及机器的容量. 为了减少在制品库存量, 本文研究这种新模型的极小化总完工时间问题. 具体描述如下:

设有 n 个工件 $T_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 在一台批处理机上加工, 加工时间为 $p_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$. 这些工件可以任意分成若干个批, 记为 B_1, B_2, \dots, B_m . 批 B_k 的大小为 $|B_k|$; 同一批 B_k 中工件的加工时间都等于该批中所有

工件加工时间的最大者, 称其为该批的基本加工时间, 记为 $p^{(k)}$, 即 $p^{(k)} = \max_{T_j \in B_k} \{p_j\}$; 批 B_k 的加工时间为批中第一个工件开始加工到最后一个工件加工完所用的时间, 记为 $P^{(k)}$; 批处理机的容量为 C . 极小化总完工时间问题用三参数表示法记为 $||c\text{-batch}, C|| \sum C_j$; 其中 C_j 表示第 j 个工件的完工时间.

连续型批调度问题的背景是钢铁业中的加热炉对管坯的加热处理^[1]. 对管坯的加热需要对其进行分批及安排各批间的加工顺序. 同一批中管坯的加热时间相同, 也就是该批中加热时间最长的管坯的加热时间. 当这批中所有管坯都被加热完后, 表示这一批管坯加工结束. 批的加工时间为从该批中的第一个工件进入机器, 到最后一个工件从机器中离开所用的时间, 批的大小为这批管坯的个数. 然后根据新批中管坯的信息, 加工新一批管坯.

钢铁企业生产的主要特征是以批方式进行生产,其调度主要分为批处理机调度和成组批调度^[2].连续型批调度问题是首次由文献[1]提出来的新型批调度问题,文献[1]研究了机器的利用率,即极小化最大完工时间问题.连续型批调度问题与传统批调度问题不同,传统批调度问题一般都是批进批出,主要分为三类^[3]:第一类是并型工件同时加工的调度问题(Parallel batching problems)^[4-6],每批的加工时间是这批工件中所有工件加工时间的最大者.第二类是串型工件同时加工调度问题(Serial batching problems)^[7,8],每批的加工时间是这批工件中所有工件加工时间之和.最后一类的批加工时间是常数^[9],与批中工件无关.文献[3,10]是关于传统批调度问题的综述.而连续型批调度问题是连续进连续出的;同一批中的工件都有各自的开始加工时间和完工时间;批的加工时间也与传统批调度问题的不同.故研究传统批调度问题的方法不适合用于连续型批调度问题.

2 批间序的性质

问题 11 *c-batch*, $C| \sum C_j$ 包含两部分内容,即如何分批及批间的排序问题.

由文献[1]可知,批 B_k 的加工时间为:

$$p^{(k)} = p^{(k)} \left[1 + \frac{|B_k| - 1}{C} \right], k = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

则 B_k 在 t 时刻开始加工时, B_k 中第 l 个工件的完工时间为:

$$t + p^{(k)} \left[1 + \frac{l-1}{C} \right], 1 \leq l \leq |B_k| \quad (2)$$

B_k 在 t 时刻开始加工时, B_k 中工件的完工时间和为:

$$\sum_{T_j \in B_k} C_j = |B_k| t + \frac{(|B_k| + 2C - 1)}{2C} |B_k| p^{(k)} \quad (3)$$

下面考虑批间的排序问题.

定义 若调度中的任意两批 P 和 Q , 批 P 在批 Q 前加工,意味着对任意的工件 T_i, T_j , 其中 $T_i \in P, T_j \in Q$, 都有 $p_i < p_j$, 则称此调度为严格批 SPT 序的.

引理 1 对于给定的 n 个工件的一个分批 B_1, \dots, B_s , 问题 11 *c-batch*, $C| \sum C_j$ 在这种分批下的最优调度

可以由 BSPT 序得到, 即 $\frac{p^{(k_1)}}{|B_{k_1}|} \leq \frac{p^{(k_2)}}{|B_{k_2}|} \leq \dots \leq \frac{p^{(k_s)}}{|B_{k_s}|}$, 其中

B_{k_j} 为这种分批下最优调度的第 j 批, $p^{(k_j)} = p^{(k_j)} \left[1 + \frac{|B_{k_j}| - 1}{C} \right], j = 1, 2, \dots, s$.

证明 用反证法. 假设最优调度 π 不符合引理结论, 则至少存在两个相邻批 B_l 与 B_k (B_l 排在 B_k 前), 使得 $p^{(l)}/|B_l| > p^{(k)}/|B_k|$. 设 B_l 开始加工时间为 t . 将 π 做变动如下: 对调 B_l 与 B_k 的位置, 保持其余批位置不

变, 得到另一个调度 π' . 显然 π 与 π' 总完工时间的差别仅在于批 B_l 与 B_k 的总完工时间不同.

由式(3)得:

$$\left[\sum_{T_j \in B_l \cup B_k} C_j \right]_{\pi} = |B_l| t + \frac{(|B_l| + 2C - 1)}{2C} |B_l| p^{(l)} + |B_k| (t + p^{(l)}) + \frac{(|B_k| + 2C - 1)}{2C} |B_k| p^{(k)},$$

$$\left[\sum_{T_j \in B_l \cup B_k} C_j \right]_{\pi'} = |B_k| t + \frac{(|B_k| + 2C - 1)}{2C} |B_k| p^{(k)} + |B_l| (t + p^{(k)}) + \frac{(|B_l| + 2C - 1)}{2C} |B_l| p^{(l)}.$$

从而两种调度下总完工时间的差为:

$$\left[\sum C_j \right]_{\pi} - \left[\sum C_j \right]_{\pi'} = \left[\sum_{T_j \in B_l \cup B_k} C_j \right]_{\pi} - \left[\sum_{T_j \in B_l \cup B_k} C_j \right]_{\pi'} = |B_k| |B_l| \left[\frac{p^{(l)}}{|B_l|} - \frac{p^{(k)}}{|B_k|} \right].$$

在假设条件下, 显然 $\left[\sum C_j \right]_{\pi} > \left[\sum C_j \right]_{\pi'}$, 与 π 是最优调度矛盾.

引理 2 若 B_l, B_k 为给定的一个分批 B_1, \dots, B_s 中的两个批, 在这种分批下的最优调度中, 当 $p^{(l)} \leq \frac{p^{(k)}}{C}$ 时, B_l 一定在 B_k 前加工.

证明 因 $C \geq 1$, 则 $\frac{p^{(l)}}{|B_l|} \leq p^{(l)}$. 由 $p^{(l)} \leq \frac{p^{(k)}}{C}$ 得: $\frac{p^{(k)}}{|B_k|} = p^{(k)} \left[1 + \frac{|B_k| - 1}{C} \right] / |B_k| \geq p^{(l)}$. 故 $\frac{p^{(k)}}{|B_k|} \geq \frac{p^{(l)}}{|B_l|}$. 由引理 1, 结论成立.

由上述引理可知, 只有 $\frac{p^{(k)}}{C} < p^{(l)} \leq p^{(k)}$ 且 $\frac{p^{(l)}}{|B_l|} > \frac{p^{(k)}}{|B_k|}$ 时, B_l 才能在 B_k 后加工. 但下面引理表明了在这种分批下的最优调度 π 中, 不会出现这种情况.

引理 3 B_l, B_k 为给定的一个分批 B_1, \dots, B_s 中的两个批, 若 $\frac{p^{(k)}}{C} < p^{(l)} \leq p^{(k)}$ 且 $\frac{p^{(l)}}{|B_l|} > \frac{p^{(k)}}{|B_k|}$, 在这种分批下的最优调度 π 中, 只将批 B_k 与 B_l 中所有工件合在一起作为一批加工的新调度的目标函数值比 π 目标函数值更小.

证明 将新调度记为 π' , 批 B_k 与 B_l 中所有工件合在一起的新批记为 B'_k . 因为 $p^{(k)} > p^{(l)}$, 故 B'_k 的基本加工时间为 $p^{(k)}$, 批的加工时间为 $p^{(k)} \left[1 + \frac{|B_k| + |B_l| - 1}{C} \right]$. 不妨设 B'_k 中所有工件的加工顺序与 π 中对应工件的顺序相同. 把 B_l 及 B_l 之前各批的所有工件的集合记为 Φ .

设 B_k 开始加工时间为 t , 则 B'_k 的开始加工时间也为 t , 故

$$\left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} = t + p^{(k)} \left(1 + \frac{|B_k| - 1}{C}\right) + p^{(l)} \left(1 + \frac{|B_l| - 1}{C}\right),$$

$$\left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'} = t + p^{(k)} \left(1 + \frac{|B_k| + |B_l| - 1}{C}\right)$$

所以

$$\left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} - \left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'} = p^{(l)} \left(1 + \frac{|B_l| - 1}{C}\right) - p^{(k)} \frac{|B_l|}{C}$$

$$= \frac{C-1}{C} p^{(l)} - \frac{p^{(k)} - p^{(l)}}{C} |B_l| \quad (4)$$

由 $\frac{p^{(k)}}{|B_k|} < \frac{p^{(l)}}{|B_l|}$ 整理得:

$$|B_l| ((C-1)p^{(k)} + |B_k|(p^{(k)} - p^{(l)})) < p^{(l)} |B_k| (C-1) \quad (5)$$

而 $p^{(k)}(C-1) + |B_k|(p^{(k)} - p^{(l)}) > 0$ 则式(5)变形为:

$$|B_l| < \frac{(C-1)p^{(l)}|B_k|}{(C-1)p^{(k)} + |B_k|(p^{(k)} - p^{(l)})} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4)整理得:

$$\left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} - \left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'} > \frac{(C-1)^2 p^{(l)} p^{(k)}}{C((C-1)p^{(k)} + |B_k|(p^{(k)} - p^{(l)}))}$$

$$> 0 \quad (7)$$

即 $\left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} > \left(\max_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'}$ (8)

式(8)说明对于任意工件 $T_j \in N - \Phi$, 在 π' 中的开始加工时间都要比 π 中的提前, 则其完工时间也将提前. 故

$$\left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} - \left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'} > \left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} - \left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi}$$

再设 T_j 是 B_l 中第 i 个工件 ($1 \leq i \leq |B_l|$), 由式(2), 其在 π 与 π' 中完工时间的差为:

$$(C_j)_{\pi} - (C_j)_{\pi'} = \frac{C-1}{C} p^{(l)} - \frac{p^{(k)} - p^{(l)}}{C} i$$

$$\geq \frac{C-1}{C} p^{(l)} - \frac{p^{(k)} - p^{(l)}}{C} |B_l| \quad (9)$$

由式(4)、(7)和(9)可知, 对任意 $T_j \in B_k$, $(C_j)_{\pi} > (C_j)_{\pi'}$. 这说明: π 中 B_l 里每个工件的完工时间都要比 π' 中对应的大, 则 B_l 中各工件的完工时间也提前了; 而 B_k 中各工件在 π 与 π' 中的开始加工时间和加工时间、加工顺序都不变, 故 $\Phi - B_l$ 中各工件的完工时间不变, 所以

$$\left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} > \left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'}$$

综上所述 $\left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi} - \left(\sum_{T_j \in \Phi} C_j\right)_{\pi'} > 0$

由上述引理可得如下结论.

定理 1 问题 11 σ -batch, $C| \sum C_j$ 的最优调度中, 各批间的加工顺序一定按基本加工时间非减的顺序排列.

3 分批的性质

对于批 B_k 及工件 T_j , 若 $p_j < p^{(k)}/C$, 由文献[1]的推论 5 可知, 在最优调度中, T_j 一定不在 B_k 中加工. 同样, 对于批 B_k 及 B_k , 若 $p^{(l)} < p^{(k)}/C$, 则 B_l 与 B_k 分开加

工优于将它们的工作合在一起作为一批加工. 另外, 分批时还有下面的性质.

引理 4 在最优调度 π 中, (1) 加工时间相同的工件一定在同一批中加工; (2) 在同一批中的工件一定是加工时间相邻的. 即 $p_{l_1} \leq p_{l_2} \leq \dots \leq p_{l_{h-1}} \leq p_{l_h}$, $h \leq n$, 若 $T_{l_1}, T_{l_h} \in B_l$, 则 $T_{l_2}, \dots, T_{l_{h-1}}$ 一定属于 B_l .

证明 用反证法. 先证明(1). 假设 π 中批 B_l 排在 B_k 前, 工件 $T_i \in B_l, T_j \in B_k$ 且 $p_i = p_j$. 由定理 1 可知 $p^{(l)} < p^{(l+1)} < \dots < p^{(k-1)} < p^{(k)}$. 只将 T_j 移入 B_{k-1} 中, 得新调度. 显然新调度的目标值比原来的小. 重复上述过程, 直到将 T_j 移入 B_l 中. 第一个结论成立.

下面证明(2). 设 $T_{l_2}, \dots, T_{l_{h-1}} \in B_k$, 且 $l \neq k$. 显然 $p^{(k)} \neq p^{(l)}$. 则若 $p^{(k)} > p^{(l)}$, 对 π 做调动如下: 只将 $T_{l_2}, \dots, T_{l_{h-1}}$ 从 B_k 调入 B_l 中. 因 $p^{(l)} \geq p_{l_h} \geq p_{l_{h-1}} \geq \dots \geq p_{l_2}$, 故 $T_{l_2}, \dots, T_{l_{h-1}}$ 调入 B_l 后的基本加工时间不会变; 而 $p^{(k)} > p^{(l)}$, 所以 $T_{l_2}, \dots, T_{l_{h-1}}$ 调出 B_k 后的基本加工时间也不会变. 与(1)的证明类似, $\left(\sum C_j\right)_{\pi} > \left(\sum C_j\right)_{\pi'}$.

同理: 若 $p^{(k)} < p^{(l)}$, 也可得到与 π 是最优调度矛盾的结果.

这样, 我们可以得到下面结论.

定理 2 问题 11 σ -batch, $C| \sum C_j$ 的最优调度一定是严格批 SPT 序的.

4 动态规划算法

由定理 1 和定理 2 可知, 把所有工件按 SPT 排序后, 按这个顺序进行分批及安排各批之间的顺序一定可以得到问题 11 σ -batch, $C| \sum C_j$ 的最优调度.

设 $f(i)$ 表示 0 时刻开始加工工件 T_i, T_{i+1}, \dots, T_n 的最优调度的总完工时间, Ω_i 表示此最优调度中批的集合. 令 $f(n+1) = 0$, 显然 $f(n) = p_n$, $\Omega_n = \{(T_n)\}$. 设 $F_i(k)$ 表示将 $T_k, T_{k+1}, \dots, T_{i-1}$ ($k+1 \leq i \leq n+1$) 作为一批, T_i, T_{i+1}, \dots, T_n 按 Ω_i 分批, 且这些批间按基本加工时间非减的顺序排列所得的调度的总完工时间. 由式(3)得:

$$F_i(k) = f(i) + ((n-k+1)P_{i-1} + \frac{(i-k-1)(2n-i-k+2)}{2C})P_{i-1}$$

$$\text{则 } f(k) = \min_{k+1 \leq i \leq n+1} \{F_i(k)\}.$$

从而得到下面的动态规划算法:

动态规划算法(DP):

步骤 1 把工件按 SPT 序编号, 使 $p_1 \leq \dots \leq p_n$.

步骤 2 令 $f(n+1) = 0$.

步骤 3 按递归方程: $f(k) = \min_{k+1 \leq i \leq n+1} \{F_i(k)\}$ 计算 $f(k), k = n, n-1, \dots, 1$. 其中

$$F_i(k) = f(i) + ((n-k+1)p_{i-1} + \frac{(i-k-1)(2n-i-k+2)}{2C})p_{i-1}$$

求出 $f(1)$ 后, 利用反向追踪就可得到最优分批,

$f(1)$ 是最优值. 算法的复杂性是 $O(n^2)$.

例 考虑问题 11 c -batch, $C | \sum C_j$, 其中 $n = 8$; $p = (1, 1, 3, 4, 5, 8, 8, 10)$; $C = 2$.

根据上述动态规划算法计算得: 此问题的最优值是 106, 最优分批是: (T_1, T_2) , (T_3, T_4, T_5) , (T_6, T_7) , (T_8) . 加工顺序如图 1 所示:

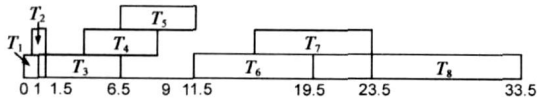


图 1 例题的调度图

5 结论

由于具有较强的实际应用背景, 批处理机调度问题近年来越来越受到关注. 本文研究的连续型批调度问题是由文献[1]提出的, 同批中工件的加工时间相同, 且有各自的开始加工时间和完工时间, 批的加工时间与批的大小、工件的加工时间及机器的容量都有关. 除目标函数是极小化总完工时间问题外, 对这一模型其他目标函数及工件具有到达时间或工期限制等问题的研究同样具有重要意义.

参考文献:

- [1] 赵玉芳, 唐立新. 极小化最大完工时间的单机连续型批调度问题[J]. 自动化学报, 2006, 32(5): 730-737.
Zhao Yufang, Tang Lixin. Scheduling a single continuous batch processing machine to minimize makespan[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(5): 730-737. (in Chinese)
- [2] Tang L X, Liu J Y, Rong A Y, Yang Z H. A review of planning and scheduling systems and methods for integrated steel production[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 133(1): 1-20.
- [3] Webster S, Baker K R. Scheduling groups of jobs on a single machine[J]. Operation Research, 1995, 43(4): 692-703.
- [4] Lee G Y, Uzsoy R, Martir Vega L A. Efficient algorithms for scheduling semiconductor burr in operations[J]. Operations

Research, 1992, 40(4): 764-775.

- [5] Brucker P, Gladky A, Hoogeveen H, Kovalyov M Y, Potts C N, Tautenhahn T, Van S de Vldde. Scheduling a batching machine[J]. Journal of Scheduling, 1998, 1(1): 31-54.
- [6] Hochbaum D S, Landy D. Scheduling semiconductor burr in operations to minimize total flowtime[J]. Operations Research, 1997, 45(6): 874-885.
- [7] Coffman E G Jr, Yannakakis M, Magazine M J, Bantos C. Batch sizing and job sequencing on a single machine[J]. Annals of Operations Research, 1990, 26(2): 135-147.
- [8] Ng C T, Cheng T C E, Yuan J J, Liu Z H. On the single machine serial batching scheduling problem to minimize total completion time with precedence constraints, release dates and identical processing times[J]. Operations Research Letters, 2003, 31(2): 323-326.
- [9] Ahmadi J H, Ahmadi R H, Dasu S, Tang C S. Batching and scheduling jobs on batch and discrete processors[J]. Operations Research, 1992, 39(4): 750-763.
- [10] Potts C N, Kovalyov M Y. Scheduling with batching[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 120(2): 228-249.

作者简介:



赵玉芳 女, 1966 年生于辽宁辽阳, 东北大学物流优化与控制研究所博士研究生, 沈阳师范大学数学与系统科学学院副教授, 研究方向为生产调度与组合最优化.

E-mail: yufangzhao66@163.com



唐立新 男, 1966 年生于黑龙江绥化, 教育部长江学者特聘教授、东北大学物流优化与控制研究所所长、教授、博士生导师. 研究方向为生产调度、物流与供应链管理和组合最优化等.

E-mail: qhjytx@mail.neu.edu.cn